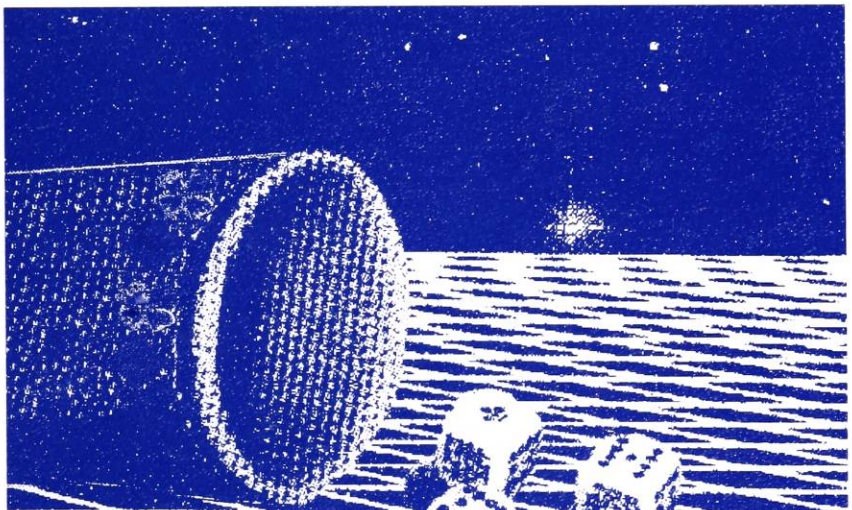
VALORES ESPERADOS

Jorge Rivera Benítez



UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

VALORES ESPERADOS

VALORES ESPERADOS

Jorge Rivera Benítez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

División de Ciencias Básicas e Ingeniería Departamento de Sistemas

ISBN: 970-654-678-2

Corrección:
Marisela Júarez Capistrán
Ilustración de Portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

Av. San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas
Deleg. Azcapotzalco, C.P. 02200
México, D.F.

Sección de producción
y distribución editoriales
tel. 5318-9222/9223. Fax 5318-9222

1a. edición, 1999
2a. edición, 2000
1a. reimpresión, 2001

Impreso en México.

VALORES ESPERADOS

1 El promedio al tirar un dado. Se tira un dado una vez. ¿Cuál es el promedio del número que observemos?

SOLUCIÓN

Si X es el valor que resulta al tirarlo, sabemos que

$$f(x) = f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1,2,\ldots,6 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Su valor esperado es

$$E(X) = \sum_{x=1}^{6} x\, P(X = x)$$

$$= 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) + 5P(X = 5) + 6P(X = 6)$$

$$= 1\left[\frac{1}{6}\right] + 2\left[\frac{1}{6}\right] + 3\left[\frac{1}{6}\right] + 4\left[\frac{1}{6}\right] + 5\left[\frac{1}{6}\right] + 6\left[\frac{1}{6}\right]$$

$$= 3.5$$

¿Qué significa $E(X) = 3.5$? Suponga que te invitan a apostar a este dado obteniendo tanto pesos como el número que salga en el dado (recibe \$1 si el número que sale es 1, \$2 si sale un 2, etc.) Un amigo probabilista te dice que $E(X) = 3.5$, ¿qué significa?

El valor esperado de X, E(X), también se indica por μ (la letra griega "*mu*").

2 Se tiran 3 volados ¿cuál es el número esperado de águilas? ¿Ves prometedor para apostar a este experimento?

SOLUCIÓN

El número X de águilas posibles al tirar 3 volados puede tomar valores 0,1,2,3. Para encontrar el valor esperado debemos multiplicar cada uno de los posibles valores de X por la respectiva probabilidad de que sucede, o sea

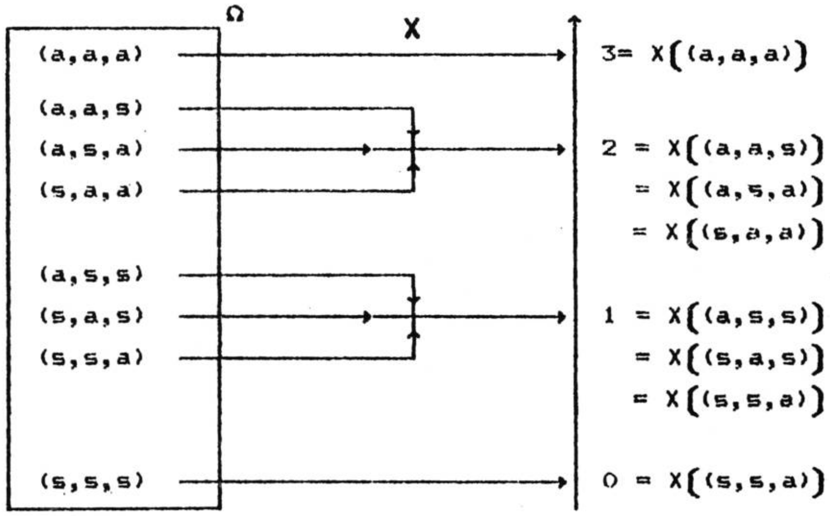
$$E(X)=\sum_{x=-\infty}^{\infty} x\,P\left(X=x\right)=\sum_{x=0}^{3} x\,P\left(X=x\right)$$

$$=0P\left(X=0\right)+1P\left(X=1\right)+2P\left(X=2\right)+3P\left(X=3\right)$$

Para calcular la suma anterior debemos encontrar las probabilidad de los posibles valores de X. El espacio muestra correspondiente a la tirada de 3 volados es

$$\Omega=\{(a,a,a),(a,a,s),(a,s,a),(s,a,a),(s,a,a),(s,a,s),(s,s,a),(s,s,s)\}$$

La correspondencia entre Ω y los valores que toma X se muestra en el siguiente diagrama



Del diagrama anterior se deduce fácilmente que

$$P\left(X=0\right)=P\left(\{(s,s,s)\}\right)=\frac{1}{8}$$

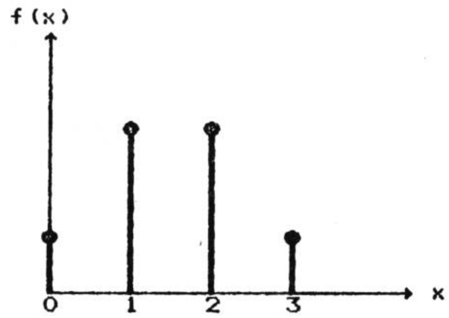
$$P\left(X=1\right)=P\left(\{(s,s,a),(s,a,s),(a,s,s)\}\right)=\frac{3}{8}$$

$P(X=2)=P(\{(s,a,a),(a,s,a),(a,a,s)\})=\frac{3}{8}$

$P(X=3)=P(\{(a,a,a)\})=\frac{1}{8}$

Resumiendo, tenemos

$$f(x)\equiv P(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & \text{si } x=0\\ \frac{3}{8} & \text{si } x=1\\ \frac{3}{8} & \text{si } x=2\\ \frac{1}{8} & \text{si } x=3\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$



Estas probabilidades van a ser las ponderaciones (teóricas) de los respectivos resultados 0, 1, 2 y 3, por lo que su valor esperado, el promedio ponderado probabilísticamente, resulta

$$E(X)=0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)$$

$$=0\left[\frac{1}{8}\right]+1\left[\frac{3}{8}\right]+2\left[\frac{3}{8}\right]+3\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{3}{2}=1.5=\mu$$

o sea, que si le entramos al juego sacaremos, en promedio, 1.5 águilas. ¿Tiene sentido este número? ¿Qué significa? Piensa frecuentistamente, lo que pasaría si participas 100 veces, 20 veces, etc.

3 En una lotería realizada para beneficio de la estación de bomberos local se venden 8000 boletos a \$1 cada uno. El premio es un automóvil de \$3000 (dólares). Si Juan compra dos boletos, ¿cuál es su ganancia esperada?

SOLUCIÓN

Si alguno de los números que compró es el premiado gana el carro y sólo gasta \$2, por lo que su ganancia neta es \$ 2998 (3000 – 2 pesos), pero ¿cuál es la probabilidad de conseguir esta ganancia?

La probabilidad de que el número que salga en la tómbola haya sido uno de los que compró Juan es 2/8000, por lo tanto, la probabilidad de que gane \$ 2998 es 2/8000.

Si el número premiado no lo compró Juan, no gana el carro y pierde sus \$2, o digamos que tiene una ganancia de -\$2. La probabilidad de que esto ocurra es que salga cualquiera de los 7998 boletos que no compró Juan, o sea 7998/8000.

Si llamamos Y a la ganancia que tiene Juan al participar en la rifa, entonces, Y puede tomar los valores -\$2 o \$2998, con probabilidades

$$P\left(Y = -2\right) = \frac{7988}{8000} \; ; \quad P\left(Y = 2998\right) = \frac{2}{8000}$$

por lo que su valor esperado es

$$E(Y) = (-2)P\left(Y = -2\right) + 2998\, P\left(Y = 2998\right) = (-2)\frac{7998}{8000} + (2998)\frac{2}{8000}$$
$$= -\$1.25$$

¿Qué significa $-\$\,1.25$?

OTRA FORMA (LA LEY DEL ESTADÍSTICO INCONCIENTE).

Sea X el número que sale premiado en la tómbola. Suponiendo que los número vendidos fueron numerados del 1 al 8000, entonces, X toma un valor x del conjunto $\{1,2,\ldots,8000\}$. La función de densidad de probabilidad puntual de X resulta

$$f(x) = P\left(X = x\right) = \begin{cases} \frac{1}{8000} & \text{si } x \in \{1,2,\ldots,8000\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La ganancia Y de Juan puede expresarse en términos de la variable aleatoria X como sigue: supón que los números que compró Juan fueron los número 1 y 2, entonces

$$Y=\begin{cases} 2998 \text{ si } X\in\{1,2\} \\ -2 \text{ si } X\in\{3,4,\ldots,8000\}\end{cases}$$

así,

$$P(Y=2998)= P(X\in\{1,2\})=\frac{2}{8000}$$

$$P(Y=-2)= P(X\in\{3,4,\ldots,8000\})=\frac{7998}{8000}$$

$$E(Y)= 2998\ P(Y=2998) + (-2)\ P(Y=-2)$$

$$E(Y)= 2998P(X\in\{1,2\}) + (-2)P(X\in\{3,4,\ldots,8000\})$$

$$= (2998)\frac{2}{8000} + (-2)\frac{7998}{8000} = -1.25$$

Si indicamos por $Y= g(X)$, la ganancia Y en términos del número del boleto premiado, lo que hemos calculado resulta, en símbolos, lo siguiente

$$E(g(X))=\sum_{x=1}^{8000} g(x)P(X=x)$$

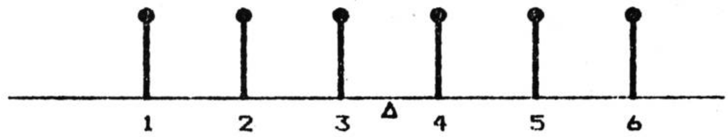
Notarás que estamos revolviendo la probabilidad de X con el valor de la función $g(X)$ y no con el valor de X, sin embargo, esta incongruencia resulta válida y así se usó durante mucho tiempo como una definición del valor esperado de $g(X)$ en lugar de un teorema, por eso se llama La Ley del Estadístico Inconciente.

4. En los siguientes ejemplos considera una variable aleatoria X que representa distintos fenómenos. En cada caso considera que los valores x que toma la variable X, están representados en un eje horizontal y considera a este eje como una barra muy delgada de longitud infita. Sobre esta barra se distribuye una masa de magnitud 1: se cuelgan ganchos de peso $f(x)$ en los puntos x que juntos suman dicha masa. La densidad de la masa varía en diferentes puntos de la barra según la función de probabilidad, pudiendo haber puntos en que no haya ninguna masa.

La media μ de la variable X representa el punto único (en caso de existir) en el eje horizontal sobre el cual se podría sostener la barra sin voltearse, o sea, μ es el centro de gravedad.

Por inspección del centro de gravedad encuentra la media de las distribuciones mostradas. También encuéntrala matemáticamente, primero encontrando la densidad correspondiente

a)



El centro de gravedad visto de la gráfica es 3.5, o sea, $\mu = 3.5$

¿Qué podría representar la variable X que toma los valores mostrados en la gráfica? ¿Cuál es la probabilidad en cada uno de esos valores?

La variable X podría representar el número obtenido al tirar un dado y su función de probabilidad puntual es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \ ; & x \in \{1,2,\ldots,6\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

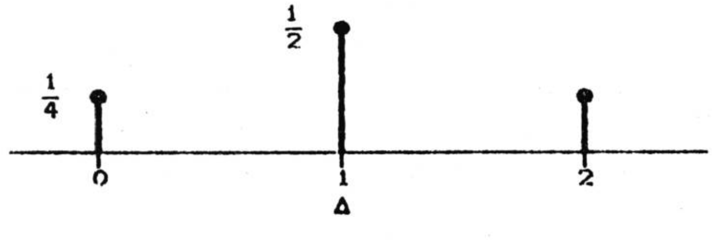
$$\mu = 1f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) + 5f(5) + 6f(6)$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$$

En el cálculo anterior se usó la fórmula

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{con } n = 6$$

b)

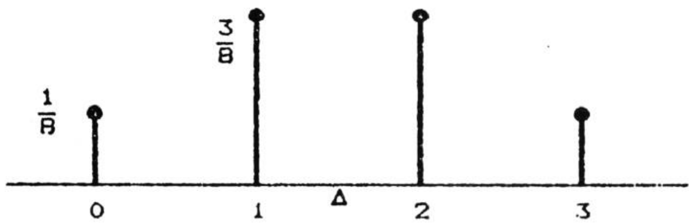


Visualmente su centro de gravedad está en 1, o sea, $\mu = 1$.

¿Qué podría representar la variable X que tome los valores 0, 1 y 2? Si te acuerdas del problema de D'Alembert: X, representaría el número de águilas en la tirada de dos volados, su valor esperado sería

$\mu = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) = 1(1/2) + 2(1/4) = 1$

c)

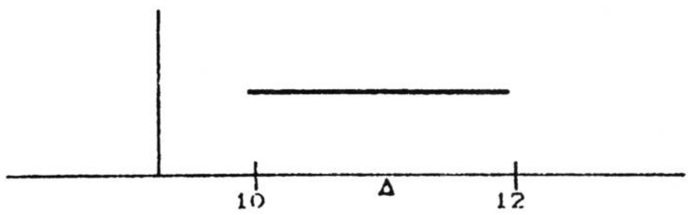


De la figura, se observa que el centro de gravedad está localizado en 1.5, como se indica con el triángulo.

La variable X representaría el número de águilas en tres volados como ya se ha visto*, entonces

$\mu = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) + 3f(3) = 1(3/8) + 2(3/8) + 3(1/8) = 1.5$

d)



El centro de gravedad se muestra con el triángulo y es igual a 11, o sea, $\mu = 11$.

La variable aleatoria X es una variable uniformemente distribuida entre 10 y 12 y podría representar lo que se te ocurra, por ejemplo, estaría midiendo el peso de un objeto; su densidad sería

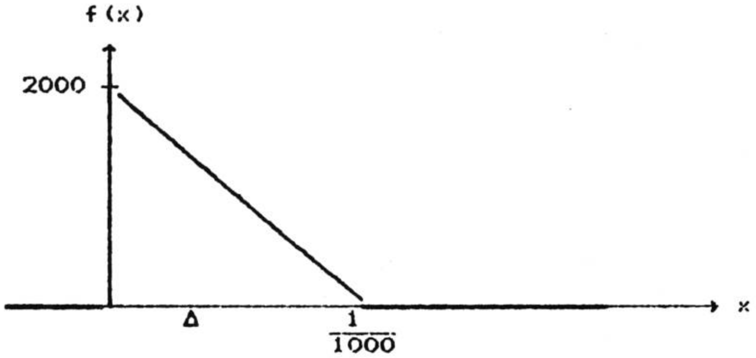
$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 10 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

* En el cuaderno de variables aleatorias.

por lo que su valor esperado es

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{10}^{12} x(1/2) dx = \frac{x^2}{4} \Bigg|_{10}^{12} = \frac{(12)^2}{4} - \frac{(10)^2}{4} = 11$$

e)



Visualmente el centro de gravedad está a 1/3 de la base* y se indica con el triángulo:

$$\mu = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1000}\right] = \frac{1}{3000}$$

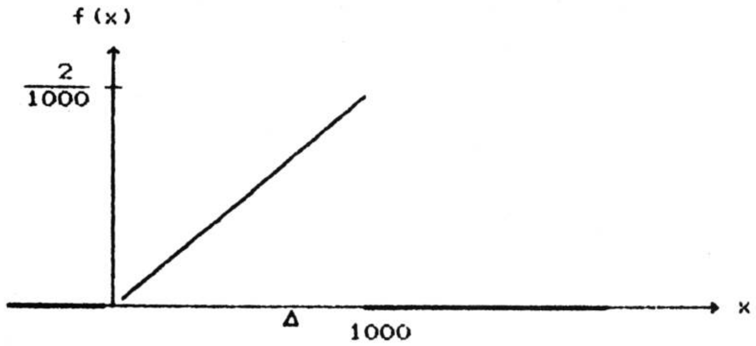
La función f(x) es una recta con ordenada al origen igual a 2000 y pendiente $-2000/(1/1000) = 2000\,000$, por lo que
$f(x) = 2000 - 2000\,000\,x$ si $x \in [0, 1/1000]$; $f(x) = 0$ en otro caso.
Por lo tanto,

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\frac{1}{1000}} x\left[2000 - 2000\,000x\right] dx = \frac{1}{3000}$$

La variable X podría representar el tiempo de vida (en horas) de un virus extraido de un tejido.

---
* Un resultado básico de temas de dinámica o de fuerza y equilibrio.

f)



El centro de gravedad está a un 1/3 de derecha a izquierda de la base, o a 2/3 de izquierda a derecha:

$$\mu = \frac{2}{3}\ (1000) = \frac{2000}{3} = 666.6666$$

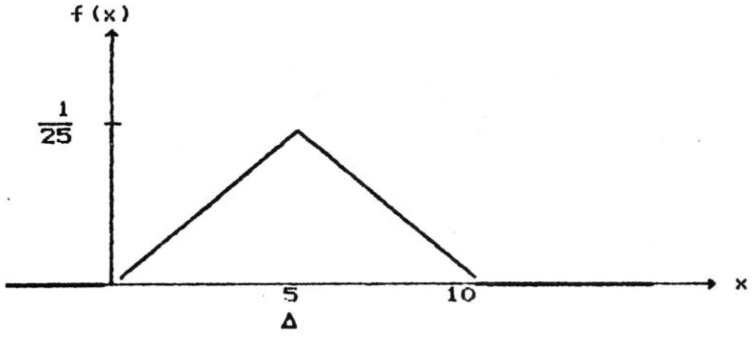
Si X representa el tiempo de vida de una bomba (en horas), qué significa μ= 666.6666 horas?

Matemáticamente, la función f(x) es un recta con ordenada al origen 0 y pendiente $(2/1000)/1000 = 2/1000\ 000 = 1/500\ 000$, o sea

$$f(x) = \frac{1}{500\ 000}\, x \qquad \text{si } x \in [0,1000]\ ;\ f(x) = 0 \text{ en otro caso}$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{1000} x \left(\frac{1}{500\ 000} \right) dx = 666.6666$$

g)



Por simetría es fácil ver que el centro de gravedad Δ, está localizado en 5, por lo que $\mu = 5$. Si X representa la ventas de pan en la "Pananderia El Rosario" (en miles de kilogramos) ¿qué significa que el valor esperado sea 5 mil kilogramos?

La función f(x) es

$$f(x) = \frac{1}{125}x \qquad \text{si} \quad 0 \le x \le 5$$

$$f(x) = \frac{2}{25} - \frac{1}{125}x \qquad \text{si} \quad 5 \le x \le 10$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{en otro caso}$$

Por lo tanto,

$$\mu = \int_0^5 x\left(\frac{1}{125}x\right)dx + \int_5^{10} x\left(\frac{2}{25} - \frac{1}{125}x\right)dx = 5$$

5. La demanda semanal de cierto refresco, en miles de litros, en una cadena local de tiendas, es una variable aleatoria continua X que tiene la densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1); & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obtén la media y la varianza de las ventas.

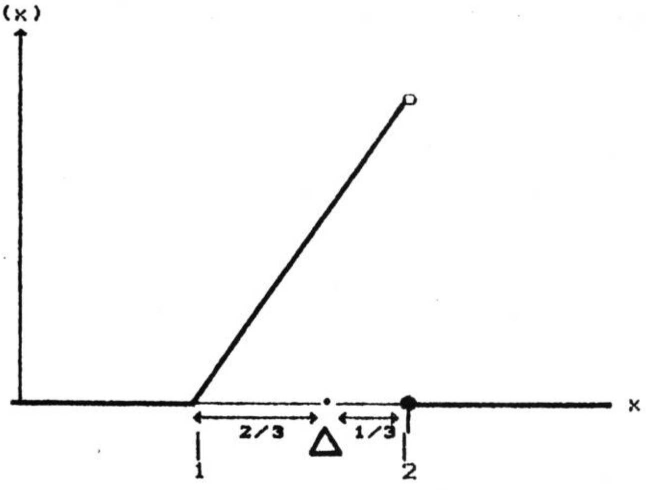
SOLUCIÓN

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^2 x(2)(x-1)dx = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$$

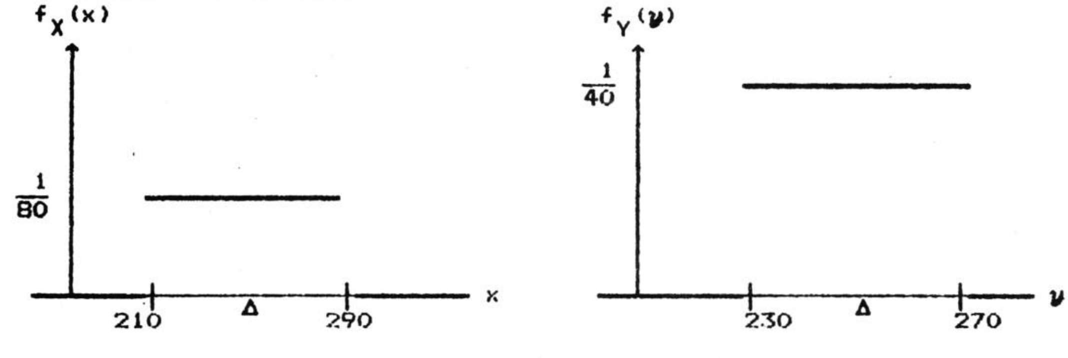
$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^2 x(2)(x-1)dx = \frac{17}{6}$$

$$\sigma^2 = Var(x) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{17}{6} - \left[\frac{5}{3}\right]^2 = \frac{1}{18} \quad *$$

*Hemos usado la fórmula "corta", pues la definición es $\sigma^2 = E((x-\mu)^2) = E(x^2) - \mu^2$



6 Se disponen de dos variedades de trigo. En condiciones semejantes (suelo, sol, riego, etc.) una variedad da un rendimiento de X toneladas por hectárea, y la otra Y toneladas por hectárea, cuyas distribuciones se muestran a continuación.



i) Calcula los rendimientos medios de cada variedad. Determínalos por inspección visual o usando fórmulas para distribución uniforme.

ii) ¿Qué variedad de trigo comprarías?

iii) Calcula la varianza del rendimiento de cada variedad por dos caminos: usando una expresión rápida para la varianza vía $E(X^2)$ y también usando las fórmulas para la distribución uniforme.

SOLUCIÓN

i) El valor esperado para la primera variedad es $\mu_1 = E(X) = 250$ toneladas por hectárea como se muestra visualmente con el triángulo que aparece en la gráfica izquierda. Si queremos usar la fórmula para la distribución uniforme (ver apéndice) que dice que si una variable se distribuye uniformemente entre α y β, entonces

$$E(X) = \frac{\beta + \alpha}{2}$$

Usando esta fórmula para la ambas variedades de trigo, resulta

$$E(X) = \frac{290 + 210}{2} = 250 \qquad y \qquad E(Y) = \frac{270 + 230}{2} = 250$$

ii) Como las dos variedades tienen una media idéntica, el valor esperado no nos da un criterio para inclinarnos hacia alguna variedad. Veremos si la variancia nos ayuda a decidir.

iii) Para la primera variedad

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{210}^{290} x^2\left(\frac{1}{80}\right)dx = \frac{x^3}{240}\Bigg|_{210}^{290} = \frac{1\ 512\ 800}{24} = 63033.333$$

$$\sigma_1^2 = Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = 63033.333 - (250)^2 = 533.333$$

Usando la fórmula de la variancia para la distribución uniforme que es

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

resulta para ambas variedades

$$\sigma_1^2 = Var(X) = \frac{(290 - 210)^2}{12} = 533.333$$

$$\sigma_2^2 = Var(Y) = \frac{(270 - 230)^2}{12} = 133.333$$

La desviación estándard de la primera variedad es $\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2} = \sqrt{533.333} = 23.09$ toneladas por hectárea y para la segunda variedad es $\sigma_2 = \sqrt{133.33} = 11.54$ toneladas por hectárea. Si comparamos las desviaciones estándard, resulta que la variedad 2 es mejor. ¿Crees que este criterio es suficiente? Calcula coeficientes de variación para cada variedad, cajas con bigotes "poblacionales" y la gráfica q – q "poblacional". ¿Tiene sentido hablar de estos últimos diagramas poblacionales?

7. Sea X la variable aleatoria que representa la vida en horas de cierto tipo de tubo. La función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{20\,000}{x^3} & \text{si } x > 100 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

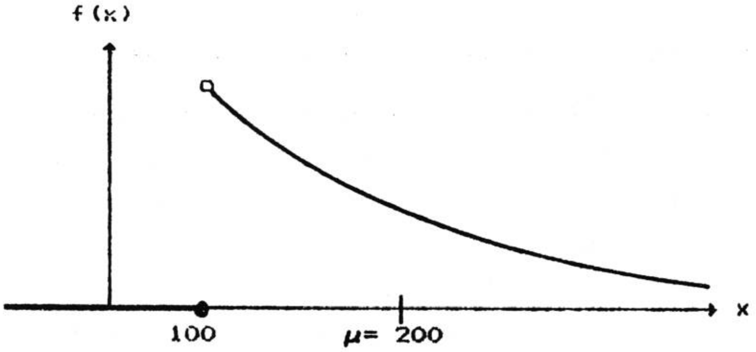
Determina la vida esperada de este tubo. ¿Cuál es la probabilidad de que dure menos de su valor esperado? ¿Coincide la media con la mediana?

SOLUCIÓN

La vida esperada $\mu = E(X)$ es

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{100}^{\infty} x \frac{20000}{x^3} dx = 20000 \left[- x^{-1}\right]\Big|_{100}^{\infty} = 200 \text{ horas}$$

Por consiguiente, puede esperarse que este tipo de tubo dure en promedio 200 horas.



La probabilidad de que dure menos de su valor esperado es

$$P(X < \mu) = P(X < 200) = \int_{100}^{200} \frac{20000}{x^3}\, dx = 20000\left[-\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{100}^{200} = \frac{31}{32}$$

Se observa que abajo de la media está casi el 50% de los datos, por lo que aproximadamente la media es igual a la mediana. Rigurosamente la mediana de X es un número tal que a la izquierda de m se encuentra el 50% de los datos, es decir,

$$P(X \leq m) = \int_{-\infty}^{m} f(x)\, dx = 0.5$$

Tú puedes encontrar el valor m que satisfaga la igualdad anterior.

8. Encuentra la media, la varianza y la desviación estándard de la variable aleatoria X con

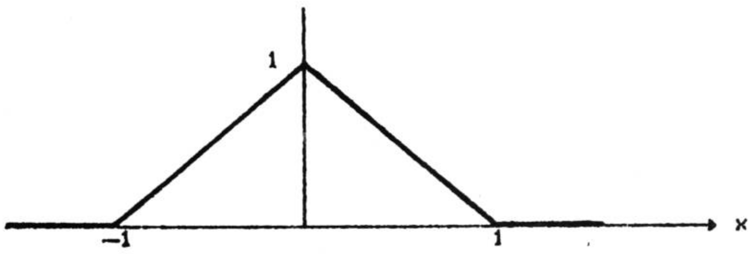
$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

SOLUCIÓN

La función se puede reescribir por

$$
f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ 1-x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

y su gráfica es



$$
E(X)=\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx+\int_{0}^{1} x(1-x)\,dx
$$

Si evalúas las integrales usando fuerza bruta, encuentra $E(X)=0$

Si te gustan los trucos (propiedades de la integral) puedes ver que

$$
\int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx = -\int_{0}^{1} x(1-x)\,dx
$$

¿Por qué? Haz el cambio $u=-x$ $\quad (x=-u)$

$$
\int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} -u(1-u)\,(-du) = \int_{0}^{1} u\,(1-u)\,du
$$

Con esta igualdad concluye que $E(X)=0$.

La varianza es

$$
\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right) - E^2(X)= E\left(X^2\right)
$$

$$
= \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{6}
$$

Su desviación estándard es

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0.408$$

9. Una variable que no tiene media. La función de densidad de Cauchy es

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)} \qquad si \qquad -\infty < x < \infty$$

Su valor esperado es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi\left(1 + x^2\right)} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi\left(1 + x^2\right)} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi\left(1 + x^2\right)} dx$$

Se puede probar que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi\left(1 + x^2\right)} dx = \lim_{B \to \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \log\left(1 + x^2\right)\Big|_{0}^{B} \right] = \infty$$

y además como

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x}{\pi\left(1 + x^2\right)} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\pi\left(1 + x^2\right)} dx = \infty$$

resulta que E(X) no está definido.

Nota que la distribución es simétrica y el "límite simétrico" (valor principal de Cauchy) existe:

$$\lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} \frac{x}{\pi\left(1 + x^2\right)} dx = 0$$

10 Supón que se conoce que el número semanal de artículos producidos en una fábrica es una variable aleatoria con media igual a 50 piezas. Si además se conoce que la variancia de la producción semanal es 25, ¿qué se puede decir sobre la probabilidad de que la producción de esta semana esté entre 40 y 60 piezas?

SOLUCIÓN

Represente por X la producción semanal. El evento de que la producción esté entre 40 y 60 piezas se puede escribir como $(40 \leq X \leq 60)$ y es equivalente a los eventos:

$$(40 - \mu < X - \mu < 60 - \mu)$$
$$(40 - 50 < X - \mu < 60 - 50)$$
$$(- 10 < X - \mu < 10)$$
$$(\ |X - \mu| < 10\ )$$

Ahora sabemos que una de las formas de escribir la desigualdad de Chebyshev

$$P(\ |X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

o equivalentemente, tomando complemento, es

$$P(\ |X - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Por lo tanto

$$P(\ |X - \mu| < 10) \geq \frac{25}{(10)^2} = \frac{3}{4}$$

y así, la probabilidad de que la producción de la presente semana esté entre 40 y 60, es a lo menos de 75%

Otra forma de escribir la desigualdad de Chebyshev es

$$P(\ |X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \qquad \text{para todo} \quad k > 0$$

sin embargo, fíjate que en lugar de pedir que k sea mayor que 0, mejor establecemos $k \geq 1$. ¿Por qué?

Otra forma equivalente a la última expresión es

$$P\left(|X-\mu| \leq k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2} \qquad \text{para todo} \quad k \geq 1$$

Usando esta expresión en nuestro ejemplo, tenemos

$$P\left(|X-\mu|< 10\right)= P\left(|X-\mu|<k\sigma\right) \quad \text{con } k\sigma= 10 \quad \text{o} \quad k= 2$$

y por lo tanto

$$P\left(|X-\mu|< 10\right) = P\left(|X-\mu|< 2\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

11 Sea X una variable uniformemente distribuida en el intervalo (0,10), es decir, su densidad es

$$f(x)=\begin{cases} 1/10 & \text{si} \quad 0 < x < 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentra una cota superior para la probabilidad de observar una desviación mayor que 4 (desviación con respecto a su media).

Compara esta probabilidad con la probabilidad exacta.

SOLUCIÓN

La media de X y su variancia siguen

$$\mu= E(X)= \int_0^{10} \frac{x}{10}\,dx= 5$$

$$E\left(X^2\right)= \int_0^{10} \frac{x^2}{10}\,dx= \frac{100}{3}$$

$$\sigma^2= Var(X)= E\left(X^2\right) - \mu^2= \frac{25}{3}$$

La desviación con respecto a su media está representada por $|X-\mu|= |X-5|$ y la probabilidad de que sea mayor de 4 está acotada por

$$P\left(|X - 5| > \varepsilon \right) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

que resulta

$$P\left(|X - 5| > 4 \right) \le \frac{(25/3)}{16} = 0.52$$

Usando la otra expresión de Chebyshev

$$P\left(|X - 5| > 4 \right) = P\left(|X - 5| > 4 \equiv k\sigma \right) \le \frac{1}{k^2} \qquad \text{con } k = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\left(5/\sqrt{3}\right)}$$

$$P\left(|X - 5| > 4 \right) \le \frac{1}{\left[\frac{\sqrt{3}\ 4}{5}\right]^2} = 0.52$$

La probabilidad exacta de este evento es

$$P\left(|X - 5| > 4 \right) = P\left(X - 5 > 4 \right) + P\left(X - 5 < - 4 \right)$$

(Estamos remedando la regla de que $|u| > 3$ implica y es implicado que $u > 3$ ó $u < -3$).

$$P\left(|X - 5| > 4 \right) = P\left(X > 9 \right) + P\left(X < 1 \right) = \int_9^{10} \frac{1}{10}\, dx + \int_0^{1} \frac{1}{10}\, dx = 0.20$$

Se nota que la desigualdad de Chebyshev da una cota superior demasiado bondadosa (no tanto como la cota obvia de 1) que comparada con la probabilidad exacta resulta muy holgada. Sin embargo, cuando no se conoce la función de probabilidad, la cota que proporciona Chebyshev es preferible a no tener nada.

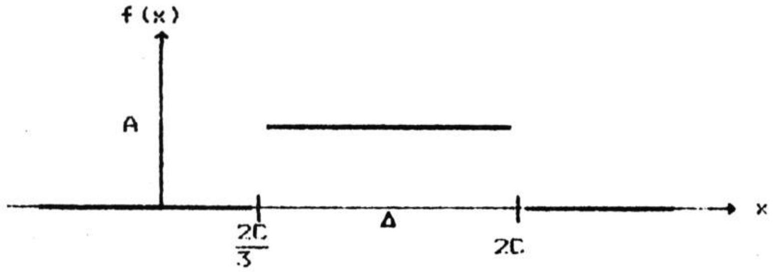
.12 Para competir en un concurso, el Sr. Arenas sabe, por experiencia, que el precio x más bajo que puede pedir por una obra de construcción puede variar entre 2/3 del costo C de la obra (teniendo que sacrificarse para ganar el concurso) y 2 veces el costo C. Esta variación del precio x que cobra sigue una distribución uniforme en el intervalo considerado, o sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4C} & \text{si } \dfrac{2}{3}C \le x \le 2C\\[2ex] 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

¿Qué porcentaje debe agregar el Sr. Arenas a su "costo estimado" (costo medio) cuando presente oferta a fin de maximizar su utilidad esperada?

SOLUCIÓN

Llama X a la variable que representa el precio a que puede vender sus servicios de construcción de obras. Sabemos que el precio (utilidad) que puede obtener del cliente varía entre 2C/3 y 2C, y esta variación es uniforme.



La altura A de la gráfica debe cumplir que el área sea igual 1, por lo que de la igualdad Area= $\left(2C - \frac{2C}{3}\right)A = 1$; resulta $A = \frac{3C}{4}$

Sabemos que el valor E(X) de su utilidad es el centro de gravedad de la figura anterior, que está localizado a la mitad del recorrido que puede tomar la variable X:

$$E(X) = \frac{(2C/3) + 2C}{2} = \frac{8C}{6}$$

La propuesta o política es agregar un porcentaje ρ a la utilidad media μ= 8C/6 para determinar lo que le cobre el cliente:

Cobro al cliente= $E(X) + \rho E(X) = (1+\rho)E(X) = (1+\rho)\ \frac{8C}{6}$

y desea que este porcentaje ρ trate de recuperar, en promedio, la máxima ganancia que antes podía obtener. Como sabemos, la máxima cuando la obra cuesta C pesos es el doble del costo, o sea, 2C. Por lo tanto, como desea que

Cobro al cliente= máxima utilidad

entonces

$(1+\rho)\frac{8C}{6} = 2C$, o sea que $\rho = \frac{1}{2}$ (50%)

¿Qué significa ρ= 50%? ¿Cuánto cobrará si la obra cuesta C= diez millones? ¿Si cuesta 50? Supón que concursa en 10 obras que cuestan (en millones) 1, 10, 5, 4, 10, 50, 10, 15, 20, 20. ¿Cuál será su utilidad? ¿Es igual, en promedio, al doble de lo que antes cobraba?

.13 (M. A. Gutiérrez A.) Otra expresión para el valor esperado de una variable discreta no negativa. Muestra que las siguientes definiciones son equivalentes cuando X es una variable entera no negativa que toma valores $x \in \{0,1,2,\ldots\}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xP\left[X=x\right]$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left[X \geq n\right]$$

SOLUCION

Desarrollando $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xP\left[X=x\right] = \sum_{x=1}^{\infty} xP\left[X=x\right]$ nos podemos dar cuenta del truco (argumento) para encontrar la otra expresión.

$$\begin{aligned} E(X) &= 0P\left[X=0\right] + 1P\left[X=1\right] + 2P\left[X=2\right] + 3P\left[X=3\right] + \ldots \\ &= 1P\left[X=1\right] + (1+1)P\left[X=2\right] + (1+1+1)P\left[X=3\right] + \ldots \end{aligned}$$

Observa que el término $P(X=1)$ aparece una vez, el término $P(X=2)$ aparece dos veces, $P(X=3)$ tres veces, etc; entonces por qué no imaginar un arreglo del siguiente tipo

$$(*) \quad \begin{aligned} E(X) = P(X=1) + P(X=2) &+ P(X=3) + \ldots \\ P(X=2) &+ P(X=3) + \ldots \\ &\ P(X=3) + \ldots \\ &\qquad\qquad\ + \ldots \end{aligned}$$

Esta presentación nos hace imaginar que los términos involucrados en la sumatoria anterior están localizados (guardados en una computadora) en un arreglo matricial de tipo triangular superior de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} P(X=1) & P(X=2) & P(X=3) & \\ & P(X=2) & P(X=3) & \\ & & P(X=3) & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

y que para encontrar $E(X)$ hay que sumar todos los elementos de esta matriz. Para sumar todos sus elementos podemos pensar en sumar columna por columna y después sumar los totales de cada una de las columnas. Pero también podemos al revés: primero sumar cada rengló individualmente y luego acumulamos los resultados de cada renglón.

Siguiente este último enfoque tenemos

$$\text{Suma del primer renglón} = \sum_{x=1}^{\infty} P(X=x) = P(X \geq 1)$$

$$\text{Suma del segundo renglón} = \sum_{x=2}^{\infty} P(X=x) = P(X \geq 2)$$

$$\text{Suma del tercer renglón} = \sum_{x=3}^{\infty} P(X=x) = P(X \geq 3)$$

$\vdots$

$$\text{Suma de todos los renglones} = P(X\geq 1)+P(X\geq 2)+P(X\geq 3)+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} P(X\geq n)$$

Por lo tanto, la desigualdad (*) resulta

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

que era lo que se pretendía probar. Fíjate la última igualdad permite tener otra expresión obvia para $E(X)$, al reemplazar

$$P(X \geq n) = \sum_{x=n}^{\infty} P(X=x) :$$

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x=n}^{\infty} P(X=x)$$

(M. A. Gutiérrez, UAM-Azc., sugerencia).

14 Una máquina hace un producto que es revisado (inspeccionado al 100%) antes de ser enviado. El instrumento de medición es tal que es difícil de leer entre 1 y $1\frac{1}{3}$ (datos codificados). Después de que se realiza la revisión, la dimensión que resulta del producto sigue una densidad

$$f(z) = \begin{cases} kz^2 & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < z \leq 1\frac{1}{3} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentra el valor de k y su función de distribución.

b) ¿Qué fracción de los artículos caen fuera de 1 y $1\frac{1}{3}$?

c) Encuentra la media y la varianza de esta variable aleatoria. También su coeficiente de variación.

SOLUCIÓN

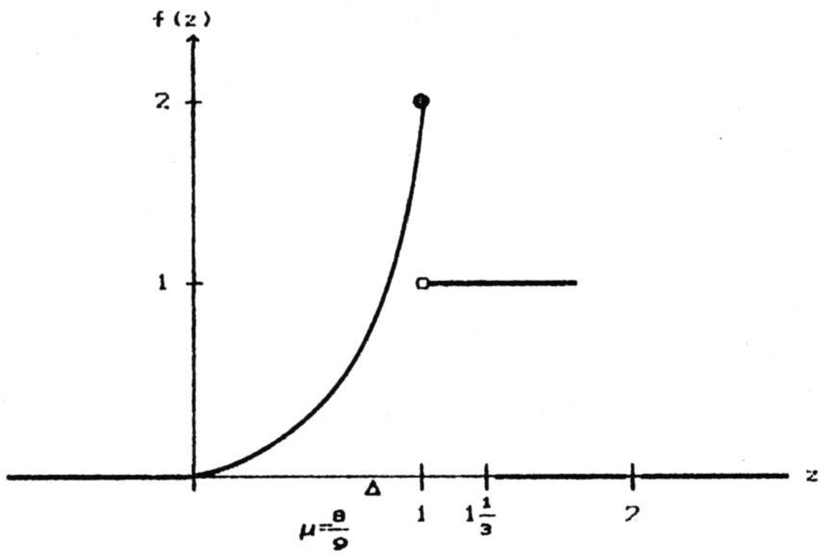
a) Para encontrar k recurrimos a la restricción que debe tener la función para ser función de densidad de probabilidad: que el área bajo f(z) es 1.

$$1 = \int_0^1 kz^2 dz + \int_1^{4/3} 1dz = k\frac{z^3}{3}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{3} = \frac{k}{3} + \frac{1}{3} \; ; \quad \text{de lo que} \quad k = 2$$

Por lo que su función es

$$f(z) = \begin{cases} 2z^2 & \text{si } 0 \le z \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 < z \le 1\frac{1}{3} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y su gráfica luce como sigue



La función de distribución.

Para una z particular, digamos z_* que esté entre 0 y 1

$$F(z_*) = P(Z \le z_*) = \int_0^{z_*} f(t)dt = \int_0^{z_*} 2t^2 dt = \frac{2t^3}{3}\Bigg|_0^{z_*} = \frac{2}{3} z_*^3$$

Para un z_* que está entre 1 y $1\frac{1}{3}$, resulta

$$F(z_*) = P\left(Z \leq z_*\right) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{z_*} f(t)dt = \int_0^1 2t^2 dt + \int_1^{z_*} 1dt$$

$$= \frac{2}{3}\, t^3 \Big|_0^1 \pm t \Big|_1^{z_*} = \frac{2}{3} + (z_* - 1) = -\frac{1}{3} + z_*$$

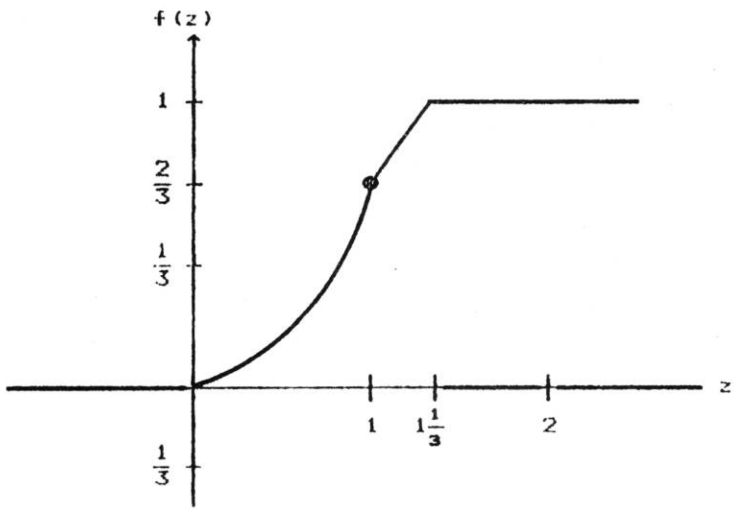
Para un z_* mayor que $1\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$:

$$F(z_*) = \int_0^1 2t^2 dt + \int_1^{4/3} 1dt + \int_{4/3}^{z_*} 0dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

En resumen

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0 \\ \frac{2}{3}\, z^3 & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ -\frac{1}{3} + z & \text{si } 1 \leq z \leq 1\frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } z > 1\frac{1}{3} \end{cases}$$

Su gráfica es



b) $P\begin{bmatrix}\text{artículo no esté}\\ \text{en zona dudosa}\end{bmatrix} = 1-P\begin{bmatrix}\text{artículo esté}\\ \text{en zona dudosa}\end{bmatrix}$

$$P\left(0 < z < 1\right) = 1 - P\left(1 < z < 1\tfrac{1}{3}\right) = 1 - \int_{1}^{4/3} 1dz = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Recuerda que la distribución acumulada F(z) nos sirve para muchas cosas:

i) Encontrar probabilidades

$$\left.\begin{aligned} P\left(a \le z \le b\right) &= F(b) - F(a)\\ P\left(a < z \le b\right) &= F(b) - F(a)\\ P\left(a \le z < b\right) &= F(b) - F(a)\\ P\left(a < z < b\right) &= F(b) - F(a)\end{aligned}\right\} \text{ si } F(z) \text{ es continua}$$

Cuando F(z) no es continua, estas expresiones cambian.

ii) Encontrar la densidad (Terorema Fundamental del Cálculo)

$$f(z) = F'(z) \text{ cuando } F'(z) \text{ exista}$$

iii) Encontrar el valor esperado

$$E(Z) = \int_{0}^{\infty} P\left(Z > t\right)dt = \int_{0}^{\infty}\left(1 - F(t)\right)dt \qquad \text{si } Z \text{ es no negativa.}$$

$$E(Z) = \int_{0}^{\infty} P\left(Z > t\right)dt - \int_{\infty}^{0} P\left(Z \le t\right)dt = \int_{0}^{\infty}\left(1 - F(t)\right)dt - \int_{\infty}^{0} F(t)\, dt$$

para Z arbitraria.

La probabilidad anterior, de que el artículo no esté en la zona dudosa la recalcularemos usando la distribución:

$$P\left(0 < z < 1\right) = F(1) - F(0) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

c) $\mu = E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} zf(z)dz = \int_{0}^{1} z(2z^2)dz + \int_{1}^{4/3} zdz$

$$= \frac{2}{4} z^4 \Big|_0^1 + \frac{z^2}{2} \Big|_1^{4/3} = \frac{8}{9} = 0.8888$$

$$\sigma^2 = Var(Z) = E\left[(Z - \mu)^2\right] = E\left[Z^2\right] - \mu^2$$

$$E\left[Z^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z)dz = \int_{0}^{1} z^2 (2z^2)dz + \int_{1}^{4/3} z^2 dz = \frac{2}{5} z^5 \Big|_0^1 + \frac{z^3}{3} \Big|_1^{4/3}$$

$$= \frac{374}{135}$$

$$Var(Z) = \frac{374}{135} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{21654}{10935} = 1.98024$$

Así $\sigma = 1.4070$

El coeficiente de variación de Z es

$$C.V.(Z) = \frac{\sigma}{\mu}(100) = \frac{1.407}{\frac{8}{9}} = 1.58\%$$

Significa que el 1.58% de las lecturas caen alejadas de la media por una cantidad igual a 1.58% de la media $\mu = 8/9$, o sea, $0.0158(8/9) = 0.014$ unidades.

15 En la tirada de tres volados define dos variables aleatorias: la variable X que contabiliza el número de águilas obtenidas hasta el segundo volado y la variable Y, el total de águilas en los tres volados.

i) Encuentra la media y la varianza de X.

ii) Encuentra la media y la varianza de Y.

iii) Mide el grado de asociación que hay entre las variables X y Y, a través de su covariancia, que indicaremos por Cov(X,Y) y está definida por

$$\mathrm{Cov}(X,Y)= E\left[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\right]$$

donde $\mu_1= E(X)$; $\mu_2= E(Y)$; e interpreta su valor.

iv) Mide el grado de asociación entre las variables X Y a través del coeficiente de correlación indicado por $\rho\equiv \rho(X,Y)$ y definido por

$$\rho= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\ \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

Te proporcionamos la probabilidad conjunta de X y Y, así como sus marginales en la siguiente tabla

x \ y	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	1/8	1/8			$2/8= f_X(0)$
1		2/8	2/8		$4/8= f_X(1)$
2			1/8	1/8	$2/8= f_X(2)$
$f_Y(y)$	1/8	3/8	3/8	1/8	

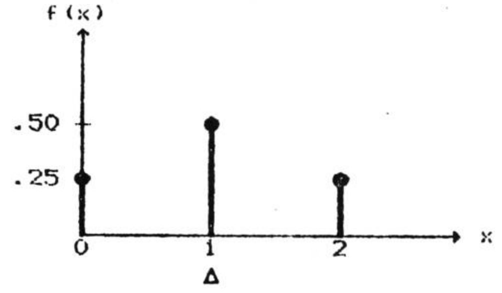
Ya se mostró cómo se encontraron estas probabilidad en el cuaderno de ***Varias Variables Aleatorias*** y ahora las tomaremos como datos.

SOLUCIÓN

i) Momentos de la marginal de X (su media y su variancia).

Para encontrar la media y varianza de X, rescataremos su probabilidad marginal de la tabla anterior:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x=0,2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Visualmente reconocemos que el centro de gravedad es 1, por lo que $\mu_1 = E(X) = 1$.

Esta media la podríamos haber encontrado usando

$$E(X)=\sum_{x=-\infty}^{\infty} x f_X(x) \qquad \text{ó} \qquad E(X)=\sum_{x=-\infty}^{\infty}\sum_{y=-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x,y)$$

pues recordarás que $\quad f_X(x)=\sum_{y=-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)$

Para encontrar su variancia

$$\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(X) = E\left[(X-\mu_1)^2\right]$$

usaremos la fórmula corta

$$\sigma_1^2 = E\left[X^2\right] - \mu_1^2$$

para lo cual primero encontraremos

$$E\left[X^2\right]=\sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) = (0)^2 P\left[X=0\right] + (1)^2 P\left[X=1\right] + (2)^2 P\left[X=2\right] = 1.5$$

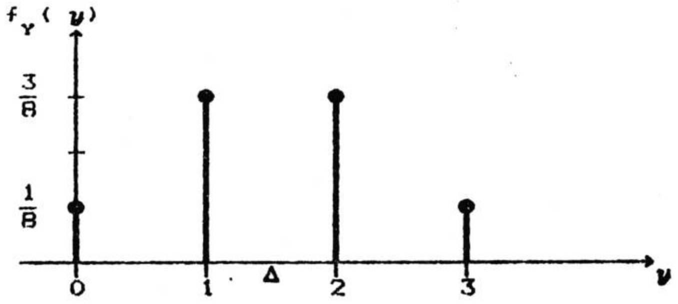
y, por lo tanto

$$\sigma_1^2 = E\left[X^2\right] - \mu_1^2 = 1.5 - (1)^2 = 0.5$$

ii) Momentos de la variable Y.

Reescribiendo su probabilidad marginal, tenemos

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8} \text{ si } y = 0,3 \\ \frac{3}{8} \text{ si } y = 1,2 \end{cases}$$



de donde vemos que su centro de gravedad está en 1.5 y así su media es

$$\mu_2 = E(Y) = 1.5$$

Para su variancia seguiremos los mismos pasos que para la variable X

$$E\left(Y^2\right) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) = (0)^2 P\left(Y=0\right) + (1)^2 P\left(Y=1\right) + (2)^2 P\left(Y=2\right) + (3)^2 P\left(Y=3\right)$$

$$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8} = 3$$

$$\sigma_2^2 = \text{Var}(Y) = E\left(Y^2\right) - \mu_2^2 = 3 - (1.5)^2 = \frac{3}{4} = 0.75$$

iii) La asociación vía covariancia.

Como dijimos, la covariancia de X y Y es

$$\text{Cov}(X,Y) = E\left((X - \mu_1)(Y - \mu_2)\right)$$

donde $\mu_1 = E(X)$; $\mu_2 = E(Y)$, sin embargo, una fórmula corta que se puede probar fácilmente (lo haremos después) es

$$\text{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$$

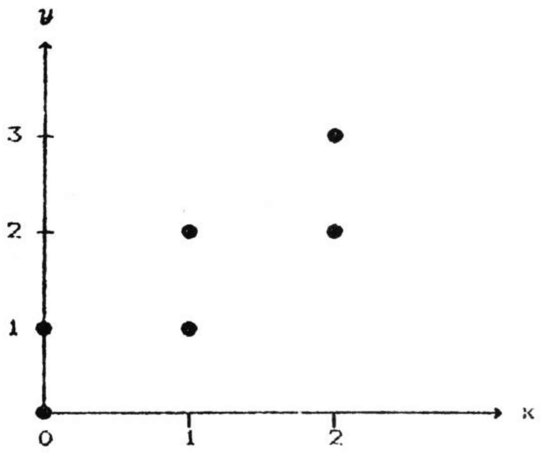
y es la que usaremos en adelante.

$$E(XY) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} xy\, P\left(X=x, Y=y\right)$$

Como podrás imaginar, el recorrido de $-\infty$ a ∞ que hacen los valores de x y y es ciencia-ficción (la generalización de las matemáticas), pues la función conjunta $f_{XY}(x,y)$ tiene como dominio todo el plano $\mathbb{R}^2$, a pesar de que algunos puntos sean imposibles de observar; por eso, sería mejor definir un nuevo dominio de la función, que sólo contenga a puntos factibles y me gustaría llamarlo ***el dominio efectivo*** de la función $f_{XY}(x,y)$, sólo que ya nos ganó el nombre T. R. Rockafellar en su libro *Convex Analysis* y lo usa en otro contexto, podríamos llamarlo el ***dominio verdadero*** de la función o ***el soporte*** de la función que es algo común en probabilidad:

$$\left[\text{Soporte de } f_{XY}(x,y)\right] = \{(x,y) \mid f_{XY}(x,y) > 0\}$$

Para nuestro caso, el Soporte de $f_{XY}(x,y)$ lo podemos identificar de la tabla de la conjunta: los puntos (x,y) donde $f_{XY}(x,y) \neq 0$ y aparecen en el siguiente esquema



SOPORTE DE $f_{XY}(x,y)$

Visualizando este soporte, los posible productos xy que aparecen en $E(XY)$ se reducen a lo siguiente

$$\begin{aligned} E(XY) = {} & (0)(0)P[X=0,Y=0] + (0)(1)P[X=0,Y=1] + (1)(1)P[X=1,Y=1] + \\ & (1)(2)P[X=1,Y=2] + (2)(2)P[X=2,Y=2] + (2)(3)P[X=2,Y=3] \\ = {} & (1)(1)(2/8) + (1)(2)(2/8) + (2)(2)(1/8) + (2)(3)(1/8) = 2. \end{aligned}$$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y) = 2 - (1)(1.5) = \frac{1}{2}$

¿Qué significa que la $Cov(X,Y)$ sea igual a $\frac{1}{2}$? Piensa qué unidades tiene; regrésate a su definición original: $E[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)]$ y tradúcela en lenguaje ordinario.

$X - \mu_1$: dispersión de X (con respecto a su media μ_1)

$Y - \mu_2$: dispersión de Y (con respecto a su media μ_2)

$(X-\mu_1)(Y-\mu_2)$: producto de la dispersión de X por la dispersión de Y.

Nota que el producto de las dispersiones puede resultar en las siguientes alternativas

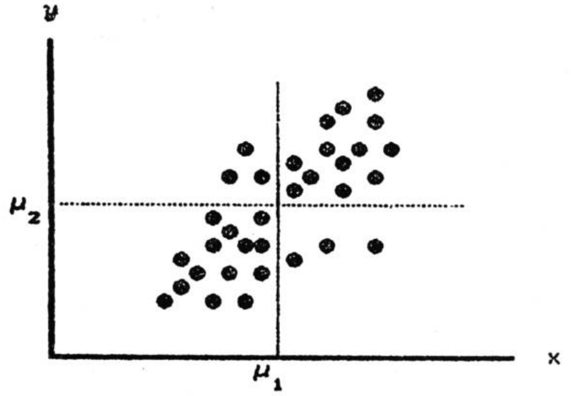
a) El producto de las dispersiones es positivo (cuando ambas dispersiones son positivas o cuando ambas son negativas).

b) El producto es negativo (cuando la dispersión de X es positiva y la de Y es negativa, o viceversa).

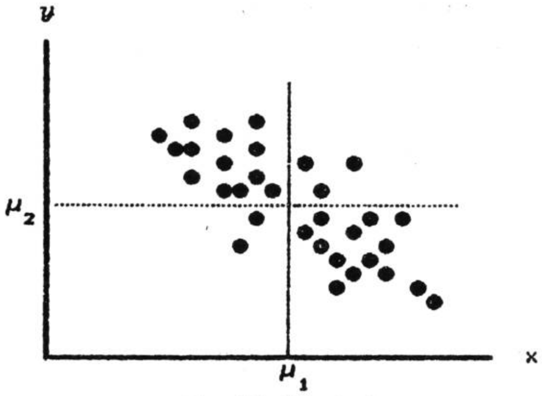
c) El producto es cero (cuando al menos una de las dispersiones es cero).

Si abundan los productos positivos (ocurren con alta frecuencia) y hay pocos productos negativos, al valor esperado de los productos (la covariancia) será positivo, e independientemente de su valor, será el signo positivo el que dé la pauta para indicar el tipo el tipo de asociación que hay entre las variables X y Y como mostraremos en la figura izquierda.

Si abundan los productos negativos, la covariancia será negativa (ver figura derecha).

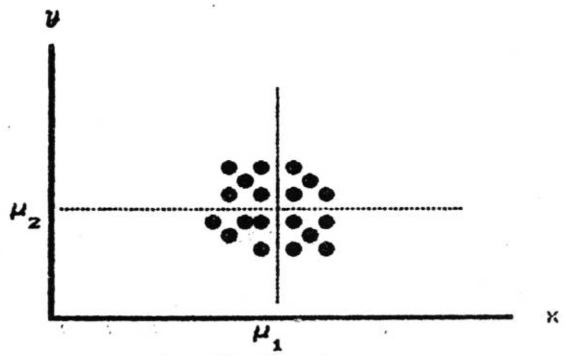


Cov(X,Y) > 0
(Cuando X crece Y crece)

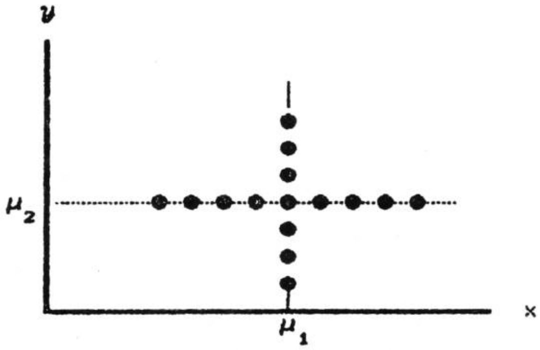


Cov(X,Y) < 0
(Cuando X crece Y decrece)

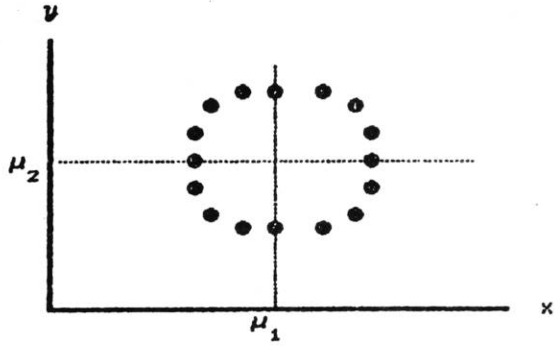
Si hay tantos productos positivos como productos negativos, se podrán cancelar al tomar su valor esperado y por lo tanto, la covariancia resulta cero. Sin embargo, hay muchas formas de que resulte cero, como se muestra en la siguiente figura



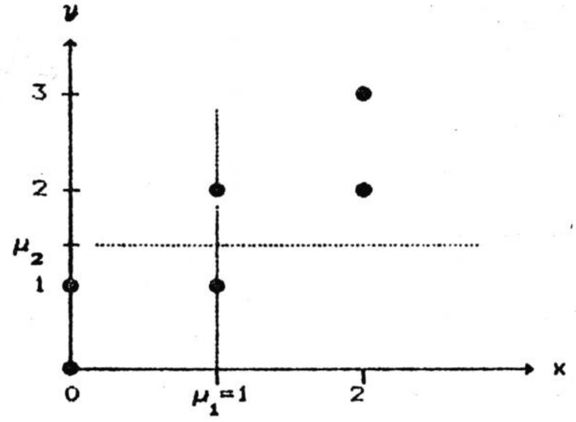
Cov(X,Y)= 0



Cov(X,Y)= 0



En nuestro ejemplo se nota que la covariancia es positiva según se puede ver en la figura siguiente



Nótese que no sólo hay que ver que los puntos muestren una tendencia a crecer tanto Y como X, sino también la frecuencia o probabilidad que tengan, pues puede ser engañoso si tienen poca probabilidad de ocurrir. Por otro lado, la observación de que la covariancia es positiva coincide con nuestro cálculo anterior.

iv) Asociación vía coeficiente de correlación.

La covariancia es una medida absoluta en la que sólo interesa el signo y no la magnitud, para tener una medida relativa está el coeciente de correlación que es adimensional y se puede probar que siempre está entre -1 y $+1$. En nuestro ejemplo

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1/2}\sqrt{3/4}} = 0.8164$$

Este valor es bastante cercano a 1, lo que indica una fuerte asociación entre X y Y. En caso de ser igual 1, indica que la relación se representa por una recta con pendiente positiva. En el caso de que fuera igual a -1, la asociación quedaría representada por una recta de pendiente negativa.

16 Sea X uniforme en (0,1). Sea $Y= X^5$. Encuentra la Covariancia y el coeficiente de correlación de las variables aleatorias X y Y. ¿Son X y Y independientes?

SOLUCIÓN

Sabemos que

$$Cov(X,Y)= E(X,Y) - E(X)\ E(Y) \qquad \rho= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\ \sqrt{Var(Y)}}$$

Entonces, necesitamos computar E(X), Var(X), E(Y), Var(Y) y E(X,Y).
Para la variable X tenemos

$$E(X)= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2)= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$Var(X)= E(X^2) - E^2(X)= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

También podemos encontrar estos momentos usando las fórmulas para una variable uniforme en (a,b)= (0,1), que son

$$E(X)= \frac{(a+b)}{2} = \frac{1}{2} \qquad Var(X)= \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12}$$

Ahora $Y= X^5$ impica que

$$E(Y)= E(X^5)= \int_{-\infty}^{\infty} x^5 f_X(x)dx = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}\ (x^6)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$E(Y^2)= E(X^{10})= \int_{-\infty}^{\infty} x^{10} f_X(x)dx = \int_0^1 x^{10} dx = \frac{1}{11}\ x^{11}\Big|_0^1 = \frac{1}{11}$$

$$\operatorname{Var}(Y) = E[Y^2] - E^2(Y) = \frac{1}{11} - \left[\frac{1}{6}\right]^2 = \frac{25}{396}$$

$$E(XY) = E[X\ X^5] = E[X^6] = \int_{-\infty}^{\infty} x^6 f_X(x)dx = \int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7}$$

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\ E(Y) = \frac{1}{7} - \left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{6}\right] = \frac{5}{84}$$

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\ \sqrt{\operatorname{Var}(Y)}} = \frac{\frac{5}{84}}{\sqrt{1/12}\ \sqrt{25/396}} = \frac{\sqrt{33}}{7}$$

Podemos contestar sobre la dependencia o independencia de X y Y sin recurrir al valor obtenido de la Cov(X,Y). Si hacemos, notamos que sólo de la definición de $Y = X^5$, se deduce que Y depende completamente de la variable aleatoria X y, así, concluimos que X y Y no son independientes.

Si deseamos dar la respuesta, basándonos en el valor de Cov(X,Y)= 5/84, debemos ser precavidos y recordar lo siguiente

i) La implicación

X, Y independiente $\Longrightarrow \operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ es verdadera.

ii) La implicación en sentido inverso, o sea

$\operatorname{Cov}(X,Y) = 0 \Longrightarrow X, Y$ independientes es falsa.

iii) La implicación llamada el contrapositivo de (*i*), o sea

X, Y no son independientes $\Longleftarrow \operatorname{Cov}(X,Y) \neq 0$

es verdadera.

En el ejemplo con $\operatorname{Cov}(X,Y) = 5/84 \neq 0$ estamos en el caso (*iii*) y, directamente podemos concluir que X y Y no son independientes.

GUIÓN DE: VALORES ESPERADOS, DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV.

VALOR ESPERADO DE UNA VARIABLE ALEATORIA.

(1) $$E(X)=\sum_{x=-\infty}^{\infty} xP\left[X = x\right]= \sum_{x=-\infty}^{\infty} xf(x); \qquad P\left[X= x\right]= f(x)$$

(2) $$E(X)= \sum_{n=1}^{\infty} P\left[X \geq n\right]$$

(3) $$E(X)= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx; \quad P\left[x - \varepsilon \leq X \leq x + \varepsilon\right]= \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)dt \doteq f(x)\ 2\varepsilon$$

LEY DEL ESTADÍSTICO INCONCIENTE. (VALOR ESPERADO DE ALGUNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE ALEATORIA).

Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad (discreta o continua) $f_X(x)$ conocida.

Sea $Y= g(x)$ una función de X, que toma el valor $y= g(x)$ cuando X toma un valor x.

En lugar de encontrar $E(Y)= E\left[g(x)\right]$ por

$$E(Y)= \sum_{y=-\infty}^{\infty} yP\left[Y = y\right]$$ donde tendrías que encontrar previamente a

$f_Y(y)= P\left[Y= y\right)$, mejor usa

(4) $$E(Y)= E\left[g(X)\right]= \sum_{x=-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)$$ y así te ahorrarás el cálculo de

$f_Y(y)$

Similarmente, en el caso continuo:

$$(5)\quad E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) = E\left[g(X)\right]$$

Algunos casos "típicos":

$$(6)\quad E\left[X^2\right]=\sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) \quad ; \qquad E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$$

$$(7)\quad E\left[e^{tX}\right]=\sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) \quad ; \qquad E\left[e^{tX}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

El valor esperado anterior se llama ***función generadora de momentos*** y se indica por

$$M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]$$

$$(8)\quad M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\sum e^{tx}\ f(x); \qquad M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

$$(9)\quad E(\cos X)=\sum (\mathrm{Cos}x)f_X(x); \qquad E(\cos X)=\int_{-\infty}^{\infty} (\cos x)f_X(x)dx$$

PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO

(10) $E(c)=c;$ $\qquad Y=g(X)=c$ $\qquad$ (constante)

(11) $E(cX)=cE(X)$

(12) $E(cX+b)=cE(x)+b;$ $\qquad$ b, c constantes

(13) $E\left[cX+bX^2\right]=cE(X)+bE\left[X^2\right]$

(14) $E\left[g_1(X)+g_2(X)\right]=E\left[g_1(X)\right]+E\left[g_2(X)\right];$ $\quad g_1(X)$ y $g_2(X)$ funciones de la misma variable X

VARIANCIA (VARIANZA)

(15) $\sigma^2 = \text{Var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$; $\mu = E(X)$

(16) $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_X(x)$; (X discreta)

(17) $\sigma^2 = \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f_X(x)dx$; (X continua)

(18) $\sigma^2 = \text{Var}(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$ y usar (6) para $E\left(X^2\right)$

PROPIEDADES DE LA VARIANZA.

(19) $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X)$; a: constante

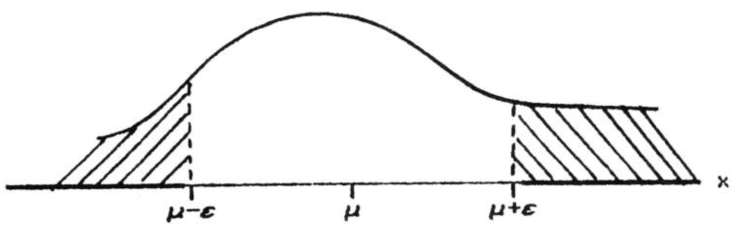
(20) $\text{Var}(X + c) = \text{Var}(x)$; c: constante

DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV.

(21) $P\left(|X-\mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ para toda $\varepsilon > 0$; μ y σ^2 finitas.

OJO: Significado del evento $\left(|X-\mu| \geq \varepsilon\right)$

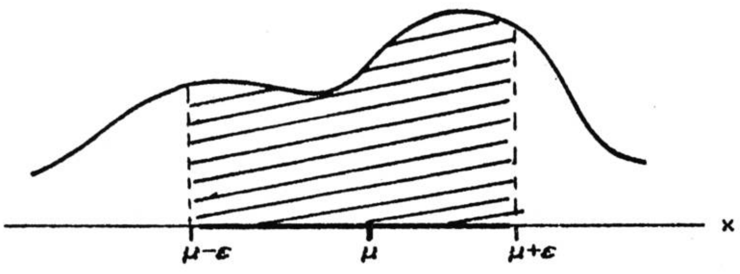
$$\left(|X-\mu| \geq \varepsilon\right) = \left(X-\mu \geq \varepsilon \text{ ó } X-\mu \leq -\varepsilon\right)$$
$$= \left(X \geq \mu+\varepsilon \text{ ó } X \leq \mu-\varepsilon\right)$$



(22) $P\left(|X-\mu| \leq \varepsilon\right) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

OJO: Significado del evento $\left(|X-\mu| \leq \varepsilon\right)$

$$\left(|X-\mu| \leq \varepsilon\right) = \left(-\varepsilon \leq X-\mu \leq \varepsilon\right) = \left(\mu-\varepsilon \leq X \leq \mu+\varepsilon\right)$$



(23) $P\left(|X-\mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2}$ para todo $k \geq 1$

(24) $P\left(|X-\mu| \leq k\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{k^2}$ para todo $k \geq 1$

DATOS BIVARIADOS (DOS VARIABLES SOBRE EL MISMO ESPACIO MUESTRA)

Sean X y Y dos variables aleatorias tales que

$f_{XY}(x,y) = f(x,y)$ es su densidad conjunta

$f_X(x) = f(x)$ es la marginada (marginal) de X

$f_Y(y) = f(y)$ es la marginada (marginal) de Y

(23) $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$ es la condición de Y dado X=x

(24) $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$ es la condición de X dado Y=y

DOS FORMAS ÚTILES PARA ENCONTRAR LA CONJUNTA

(25) $f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_{Y|X}(y|x)$ (de (23))

Cuando X y Y son discretas esta igualdad tiene una interpretación ya conocida en probabilidad condicional $P(AB) = P(A)P(B|A)$:

$P(X=x,\ Y=y) = P(X=x)\ P(Y=y|X=x)$

También podemos escribir la conjunta por

(26) $f_{XY}(x,y) = f_Y(y)\ f_{X|Y}(x|y)$ (de (24))

Esta igualdad significa en el caso discreto:

$P(X=x,\ Y=y) = P(Y=y)\ P(X=x \mid Y=y)$

(27) $\mu_1 = E(X) = \sum_x \sum_y xf(x,y) = \sum_x x\ f_X(x)$ (caso discreto)

(28) $\mu_1 = E(X) = \int\int xf(x,y)dydx = \int xf_X(x)dx$ (caso continuo)

(29) $\mu_2 = E(Y) = \sum_x \sum_y yf(x,y) = \sum_y y\ f_Y(y)$

(30) $\mu_2 = E(Y) = \int\int yf(x,y)dxdy = \int y\ f_Y(y)dy$

(31) $\sigma_1^2 = Var(X) = \sum\sum(x - \mu_1)^2 f(x,y) = \sum_x (x-\mu_1)^2\ f_X(x)$ (caso discreto)

(32) $\sigma_1^2 = Var(X) = \int\int(x-\mu_1)^2 f(x,y)dxdy = \int(x-\mu_1)^2\ f_X(x)dx$ (caso continuo)

(33) $\sigma_1^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu_1^2$ (Ambos casos: continuo y discreto)

donde

$E(X^2) = \sum\sum x^2 f(x,y) = \sum x^2 f_X(x)$

o con integrales en lugar de sumatorias en el caso continuo

(34) $\sigma_2^2 = Var(Y) = \sum\sum(y-\mu_2)^2 f(x,y) = \sum(y-\mu_2)^2\ f_Y(y)$

(35) $\sigma_2^2 = Var(Y) = \int\int(y-\mu_2)^2 f(x,y)dxdy = \int(y-\mu_2)^2 f_Y(y)dy$

FUNCIONES DE X, Y.

Sea $Z = g(X,Y)$ una función de X y Y.

(36) $E(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y)\, f_{XY}(x,y)$

Casos típicos $g(X,Y) = XY$; $g(X,Y) = X+Y$

(37) $E(XY) = \sum_x \sum_y xy\, f_{XY}(x,y)$

(38) $E(XY) = \int\int xyf(x,y)\, dxdy$

COVARIANZA DE X y Y

(39) $cov(X,Y) = E((X-\mu_1)(Y-\mu_2))$

(40) $cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY) -\mu_1\mu_2$

(41) $cov(X,Y) > 0 \Longleftrightarrow$ Si X crece entonces Y también crece.

(42) $cov(X,Y) < 0 \Longleftrightarrow$ Si X crece entonces Y decrece.

(43) $cov(X,Y) = 0$ no se puede afirmar nada sobre la tendencia de una variable en términos de la otra.

(44) X,Y independientes $\Longleftrightarrow f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ para todo (x,y)

(45) X,Y independientes $\Longrightarrow E(XY) = E(X)\,E(Y)$

(46) X,Y independientes $\Longrightarrow cov(X,Y) = 0$

(47) $cov(X,Y) \neq 0$ $\Longrightarrow$ X,Y no son independientes

(48) $\operatorname{cov}(aX,bY) = E((aX)(bY)) - E(aX)E(bY)$

$= abE(XY) - abE(X)E(Y)$

$= ab \operatorname{cov}(X,Y)$

FUNCIONES LINEALES DE X y Y

(49) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

(50) $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$

(51) $E(aX+bY)=aE(X) + bE(Y)$

(52) $\operatorname{Var}(X+Y)= \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) + 2 \operatorname{cov}(X,Y)$

(53) $\operatorname{Var}(X-Y)= \operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y) - 2 \operatorname{cov}(X,Y)$

(54) $\operatorname{Var}(aX+bY) = a^2 \operatorname{Var}(X)+b^2 \operatorname{Var}(Y)+2ab\operatorname{cov}(X,Y)$

Cuando las variables $X_1,X_2,\ldots,X_n$ provienen de la misma pobla-- ción que suponga esta representada por una variable aleatoria X con media $\mu \equiv E(X)$ y varianza $\sigma^2 = \operatorname{Var}(X)$ o sea que

$E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = E(X) = \mu$

$\operatorname{Var}(X_1) = \operatorname{Var}(X_2) = \ldots = \operatorname{Var}(X_n) \equiv \operatorname{Var}(X) = \sigma^2$

y si además para cualquier pareja de variable distintas X_i y X_j se tiene que su covarianza es cero, entonces se tienen los si - guientes resultados importantes para las funciones $\bar{X}$ y S^2 definidas por

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\,\Sigma\, X_i = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \ldots + \frac{1}{n} X_n$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\,\Sigma\,(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\,(\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2)$$

(55) $$E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)) = \frac{1}{n}\, nE(X) = E(X) = \mu$$

(56) $$Var(\bar{X}) = Var(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)) = (\frac{1}{n})^2$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\,(Var(X_1) + Var(X_2) + \ldots + Var(X_n) = \frac{1}{n^2}\, n\, Var(X) = \frac{Var(X)}{n}$$

$$Var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\, n\, Var(X) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

(57) $$E(\bar{X}^2) = Var(\bar{X}) + (E(\bar{X}))^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

(58) $$E(S^2) = E(\frac{1}{n-1}\,\Sigma(X_i - \bar{X})^2) = \frac{1}{n-1}\, E(\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2)$$

$$= \frac{1}{n-1}\,(\Sigma E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2))$$

$$= \frac{1}{n-1}\,(\Sigma(E(X_i^2) - E(\bar{X}^2))$$

$$= \frac{1}{n-1}\,(\Sigma(E(X_i^2) - \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n}))$$

$$= \frac{1}{n-1}\,(\Sigma(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n})) = \sigma^2$$

APÉNDICES

APÉNDICE A. (Algunas fórmulas útiles)

APÉNDICE B. (Tablas de algunas funciones de probabilidad).

APÉNDICE A

POR SI YA SE LE OLVIDO

SUMAS FINITAS.

Notación. El simbolo sumatoria Σ, es solo un símbolo para abreviar la expresión correspondiente a la suma de n objetos. Es decir

(1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Propiedades de la notación sumatoria

Propiedad aditiva:

(2) $\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) = (a_1+b_1) + (a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

Propiedad homogenea:

(3) $\sum_{i=1}^{n} (ca_i) = ca_1+ca_2+\ldots+ca_n = c(a_1+\ldots+a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

Propiedad telescopica:

(4) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = (a_1 - a_0)+(a_2-a_1)+\ldots+(a_n-a_{n-1}) = a_n - a_0$

Otras propiedades

(5) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + c) = (a_1 + c)+(a_2+c)+\ldots+(a_n+c) = \sum_{i=1}^{n} a_i+nc$

(6) $\sum_{i=1}^{n} a_i + c = \sum_{i=1}^{n} a_i + c$

ALGUNAS SUMAS FINITAS ÚTILES:

(7) $$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}\, n(n+1)$$

(8) $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(9) $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1+8+\ldots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(10) $$(1-r)\sum_{i=0}^{n} r^i = \sum_{i=0}^{n} (r^i - r^{i+1}) = r^0 - r^{n+1} = 1-r^{n+1}$$

(11) $$\sum_{i=0}^{n} r^i = 1+r+r^2+\ldots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad ; \; r \neq 1$$

(12) $$\sum_{i=1}^{n} r^i = r+r^2+\ldots+r^n = \frac{r-r^{n+1}}{1-r} \quad ; \; r \neq 1$$

SUMAS INFINITAS

Serie geométrica

(13) $$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = 1+r+1^2+\ldots = \frac{1}{1-r} \; ; \quad |r|<1$$

(14) $$\sum_{i=1}^{\infty} r^i = r+r^2+\ldots = \frac{r}{1-r} \; ; \quad |r|<1$$

Otras series

(15) $$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{r^i}{i!} = 1+r+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^3}{3!}+\ldots = e^r$$

APÉNDICE B

En este apendice se sigue una notación especial para describir las funciones de probabilidad se te ilustra con un ejemplo, la notación

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x \epsilon \{1,2,\ldots,6\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se escribe (piensa que por"ahora de espacio") como

$$f(x) = \frac{1}{6} \quad I_{\{1,2,\ldots,6\}}(x)$$

donde la letra I es una función indicadora que señala para que x la función f(x) = 0 y para que x es distinta de cero. Es distinta de cero en el conjunto que parece como subíndice de la letra I.

En general la función indicadora se define por

$$I_A(x) = \begin{matrix} 1 & \text{si x esta en } A \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix}$$

Table 1 DISCRETE DISTRIBUTIONS

Name of parametric family of distributions	Discrete density functions $f(\cdot)$	Parameter space	Mean $\mu = \mathscr{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathscr{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathscr{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathscr{E}[(X-\mu)^r]$ and/or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathscr{E}[e^{tX}]$
Discrete uniform	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,\ldots,N\}}(x)$ OJO: ver notacion abajo	$N = 1, 2, \ldots$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\mu_3' = \frac{N(N+1)^2}{4}$ $\mu_4' = \frac{(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)}{30}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	$0 \le p \le 1$ $(q = 1-p)$	p	pq	$\mu_r' = p$ for all r	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$	$0 \le p \le 1$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(q = 1-p)$	np	npq	$\mu_3 = npq(q-p)$ $\mu_4 = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$	$(q + pe^t)^n$
Hypergeometric	$f(x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$	$M = 1, 2, \ldots$ $K = 0, 1, \ldots, M$ $n = 1, 2, \ldots, M$	$n\frac{K}{M}$	$n\frac{K}{M}\frac{M-K}{M}\frac{M-n}{M-1}$	$\mathscr{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = r!\frac{\binom{K}{r}\binom{n}{r}}{\binom{M}{r}}$	not useful
Poisson	$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$\lambda > 0$	λ	λ	$\kappa_r = \lambda$ for $r = 1, 2, \ldots$ $\mu_3 = \lambda$ $\mu_4 = \lambda + 3\lambda^2$	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Geometric	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$0 < p \le 1$ $(q = 1-p)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\mu_3 = \frac{q+q^2}{p^3}$ $\mu_4 = \frac{q+7q^2+q^3}{p^4}$	$\frac{p}{1-qe^t}$
Negative binomial	$f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$	$0 < p \le 1$ $r > 0$ $(q = 1-p)$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$	$\mu_3 = \frac{r(q-q^2)}{p^3}$ $\mu_4 = \frac{r[q+(3r+4)q^2+q^3]}{p^4}$	$\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$

OJO: Para un conjunto A, la funcion indicadora de A se define por

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x esta en A} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si se multiplica una expresion por $I_A(x)$ se obtiene la expresion si x esta en A, pero cuando x no esta en A se obtiene 0.

Table 2 CONTINUOUS DISTRIBUTIONS

Name of parametric family of distributions	Cumulative distribution function $F(\cdot)$ or probability density function $f(\cdot)$	Parameter space	Mean $\mu = \mathscr{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathscr{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathscr{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathscr{E}[(X-\mu)^r]$ and/or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathscr{E}[e^{tX}]$
Uniform or rectangular	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$-\infty < a < b < \infty$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\mu_r = 0$ for r odd $\mu_r = \frac{(b-a)^r}{2^r(r+1)}$ for r even	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]$	$-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	μ	σ^2	$\mu_r = 0$, r odd; $\mu_r = \frac{r!}{(r/2)!} \frac{\sigma^r}{2^{r/2}}$, r even; $\kappa_r = 0$, $r > 2$	$\exp[\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2]$
Exponential	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\mu_r' = \frac{\Gamma(r+1)}{\lambda^r}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}$ for $t < \lambda$
Gamma	$f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\lambda > 0$ $r > 0$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	$\mu_j' = \frac{\Gamma(r+j)}{\lambda^j \Gamma(r)}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^r$ for $t < \lambda$
Beta	$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$	$a > 0$ $b > 0$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$	$\mu_r' = \frac{B(r+a,b)}{B(a,b)}$	not useful
Cauchy	$f(x) = \frac{1}{\pi\beta\{1 + [(x-\alpha)/\beta]^2\}}$	$-\infty < \alpha < \infty$ $\beta > 0$	Does not exist	Does not exist	Do not exist	Characteristic function is $e^{i\alpha t - \beta\|t\|}$
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} \exp[-(\log_e x - \mu)^2/2\sigma^2] I_{(0,\infty)}(x)$	$-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	$\exp[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2]$	$\exp[2\mu + 2\sigma^2]$ $-\exp[2\mu + \sigma^2]$	$\mu_r' = \exp[r\mu + \frac{1}{2} r^2 \sigma^2]$	not useful
Double exponential	$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{\|x-\alpha\|}{\beta}\right)$	$-\infty < \alpha < \infty$ $\beta > 0$	α	$2\beta^2$	$\mu_r = 0$ for r odd; $\mu_r = r!\,\beta^r$ for r even	$\frac{e^{\alpha t}}{1 - (\beta t)^2}$

(continued)

Table 2 CONTINUOUS DISTRIBUTIONS (continued)

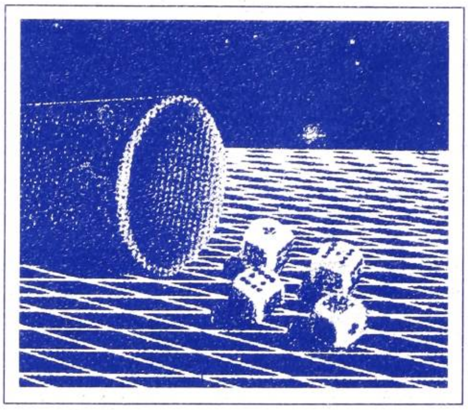
Name of parametric family of distributions	Cumulative distribution function $F(\cdot)$ or probability density function $f(\cdot)$	Parameter space	Mean $\mu = \mathscr{E}[X]$	Variance $\sigma^2 = \mathscr{E}[(X-\mu)^2]$	Moments $\mu_r' = \mathscr{E}[X^r]$ or $\mu_r = \mathscr{E}[(X-\mu)^r]$ and/or cumulants κ_r	Moment generating function $\mathscr{E}[e^{tX}]$
Weibull	$f(x) = abx^{b-1}\exp[-ax^b]I_{(0,\infty)}(x)$	$a > 0$ $b > 0$	$a^{-1/b}\Gamma(1+b^{-1})$	$a^{-2/b}[\Gamma(1+2b^{-1}) - \Gamma^2(1+b^{-1})]$	$\mu_r' = a^{-r/b}\Gamma\left(1+\frac{r}{b}\right)$	$\mathscr{E}[X^t] = a^{-t/b}\Gamma\left(1+\frac{t}{b}\right)$
Logistic	$F(x) = [1+e^{-(x-\alpha)/\beta}]^{-1}$	$-\infty < \alpha < \infty$ $\beta > 0$	α	$\frac{\beta^2\pi^2}{3}$		$e^{\alpha t}\pi\beta t \csc(\pi\beta t)$
Pareto	$f(x) = \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}} I_{(x_0,\infty)}(x)$	$x_0 > 0$ $\theta > 0$	$\frac{\theta x_0}{\theta-1}$ for $\theta > 1$	$\frac{\theta x_0^2}{(\theta-1)^2(\theta-2)}$ for $\theta > 2$	$\mu_r' = \frac{\theta x_0^r}{\theta - r}$ for $\theta > r$	does not exist
Gumbel or extreme value	$F(x) = \exp(-e^{-(x-\alpha)/\beta})$	$-\infty < \alpha < \infty$ $\beta > 0$	$\alpha + \beta\gamma$, $\gamma \approx .577216$	$\frac{\pi^2\beta^2}{6}$	$\kappa_r = (-\beta)^r\psi^{(r-1)}(1)$ for $r \geq 2$, where $\psi(\cdot)$ is digamma function	$e^{\alpha t}\Gamma(1-\beta t)$ for $t < 1/\beta$
t distribution	$f(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{(1+x^2/k)^{(k+1)/2}}$	$k > 0$	$\mu = 0$ for $k > 1$	$\frac{k}{k-2}$ for $k > 2$	$\mu_r = 0$ for $k > r$ and r odd; $\mu_r = \frac{k^{r/2}B((r+1)/2, (k-r)/2)}{B(\frac{1}{2}, k/2)}$ for $k > r$ and r even	does not exist
F distribution	$f(x) = \frac{\Gamma[(m+n)/2]}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} \times \frac{x^{(m-2)/2}}{[1+(m/n)x]^{(m+n)/2}} I_{(0,\infty)}(x)$	$m, n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n}{n-2}$ for $n > 2$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ for $n > 4$	$\mu_r' = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma(m/2+r)\Gamma(n/2-r)}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)}$ for $r < \frac{n}{2}$	does not exist
Chi-square distribution	$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{k/2-1}e^{-(1/2)x}I_{(0,\infty)}(x)$	$k = 1, 2, \ldots$	k	$2k$	$\mu_j' = \frac{2^j\Gamma(k/2+j)}{\Gamma(k/2)}$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{k/2}$ for $t < 1/2$

VALORES ESPERADOS

Se terminó
de imprimir
en el mes de mayo
del año 2001
en los talleres
de la Sección
de Impresión
y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco

La edición estuvo
a cargo
de la Sección
de Producción
y Distribución Editoriales

Se imprimieron
100 ejemplares
más sobrantes
para reposición.



0092101 35344

9.00 - $ 9.00

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Division de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Sistemas

Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales